

## OCTÁGONOS QUE TESELAN EL PLANO

**Diana Acosta y Diana Rincón**

*Egresadas de la Licenciatura en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional*  
[dialexacosta@gmail.com](mailto:dialexacosta@gmail.com), [dikristi@hotmail.com](mailto:dikristi@hotmail.com)

Esta comunicación breve surge del trabajo realizado en el curso *Teselados* del Club de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. La experiencia se plantea desde una clasificación de algunos octágonos que teselan el plano, para demostrar, a partir de técnicas de Escher, dos nuevos teoremas propuestos por los estudiantes.

### DE LOS CUADRADOS A LOS OCTÁGONOS

La experiencia que se reporta en esta ponencia tuvo lugar durante la realización de una práctica que hace parte del programa de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

Al iniciar el curso *Teselados* se indujo a los estudiantes a realizar teselaciones sencillas pidiéndoles que decoraran cuadrados y los giraran para formar diferentes mosaicos. A partir de esta actividad se consiguieron diferentes recubrimientos que permitieron visualizar diferentes tipos de octágonos irregulares que teselan el plano. La teselación que se presenta en la Figura 2 surgió a partir del recubrimiento del plano con el cuadrado de la Figura 1. El objetivo de la clase era que los estudiantes identificaran los tipos de polígonos que visualizaban allí para clasificarlos y verificar si tenían características especiales, de manera que se lograran proponer nuevos teoremas. En las Figuras 3 y 4 se pueden observar dos tipos de octágonos que teselan el plano, que surgen a partir de la Figura 2.



Figura 1. Cuadrado fraccionado por dos segmentos

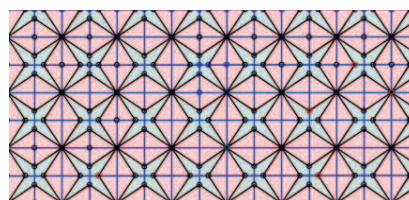


Figura 2. Recubrimiento del plano a partir del cuadrado de la Figura 1

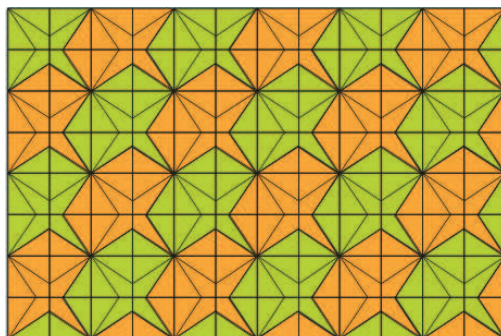


Figura 3. Plano teselado por octágonos a partir de la Figura 2

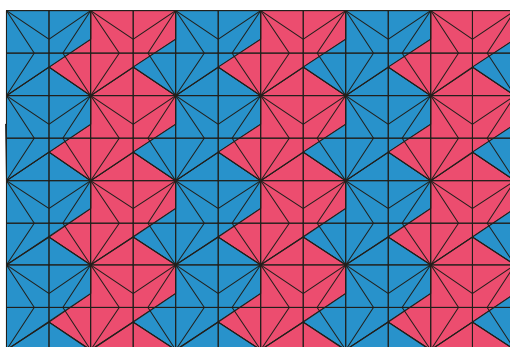


Figura 4. Plano teselado por octágonos a partir de la Figura 2

Sin embargo, en recubrimientos como el que se muestra en la Figura 5, los estudiantes encontraron octágonos que no teselan el plano y, en consecuencia, es necesario llenar los espacios vacíos con cuadrados si se pretende teselar el plano.

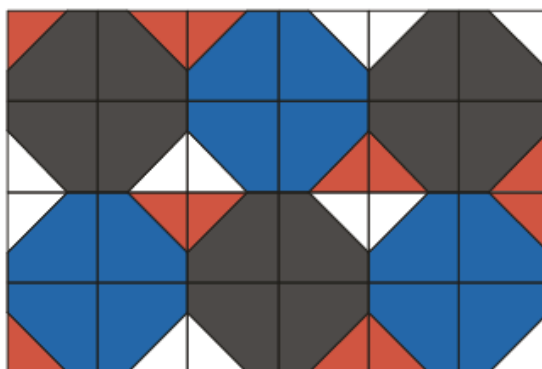


Figura 5. Plano teselado por octágonos y cuadrados

En tal circunstancia, se les propuso a los estudiantes que identificaran características comunes a octágonos que teselan el plano.

## Características de algunos octágonos que teselan el plano

Se presentó a los estudiantes la clasificación de los octágonos de la Figura 6, encontrados en diferentes recubrimientos diseñados por ellos, de manera que se pudieran estudiar las características comunes de los que sí teselan el plano.

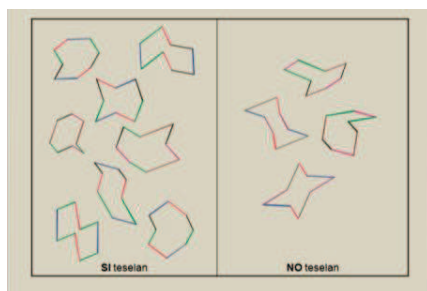


Figura 6. Clasificación inicial de los octágonos encontrados en los recubrimientos diseñados por los estudiantes

Al estudiar las características comunes de los octágonos que recubren el plano, los estudiantes hicieron las siguientes generalizaciones:

- Los octágonos que tienen exactamente dos pares de lados opuestos, paralelos y congruentes, teselan el plano (Figura 7).
- Los octágonos que tienen tres pares de lados paralelos y congruentes, separados por dos segmentos en una dirección y cuatro en la otra dirección, teselan el plano (Figura 8).

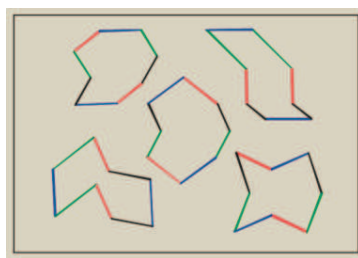


Figura 7. Octágonos que tienen dos pares de lados opuestos, paralelos y congruentes



Figura 8. Octágonos que tienen tres pares de lados paralelos y congruentes, separados por dos segmentos en una dirección y cuatro segmentos en la otra dirección

## Validez de las conjeturas

Teniendo en cuenta las características que los estudiantes encontraron en los octágonos que teselan el plano, se establecieron dos nuevos teoremas:

- **Teorema 1:** Si un octágono tiene cuatro pares disyuntos de lados paralelos y congruentes que están separados por dos segmentos en una dirección y por cuatro segmentos en la otra dirección, entonces este octágono tesela el plano.
- **Teorema 2:** Si un octágono tiene cuatro pares disyuntos de lados paralelos congruentes y exactamente dos de estos pares son opuestos, entonces este octágono tesela el plano.

La justificación de la validez de los dos teoremas está basada en la aplicación de la primera técnica de Escher:

Comience con un polígono que ya se sepa embaldosa el plano, y que tenga dos lados paralelos y congruentes. Modifique uno de estos dos lados y traslade esa modificación al otro lado. Si desea, aplique el mismo procedimiento a otro par de lados paralelos y congruentes. La figura que resulta embaldosa el plano. (Mariño, 2004, p. 70)

Los octágonos que se referencian en el Teorema 1 pueden ser construidos a partir de paralelogramos, quitando un triángulo a un lado del paralelogramo y añadiéndolo al lado opuesto, y repitiendo este procedimiento en el otro par de lados.

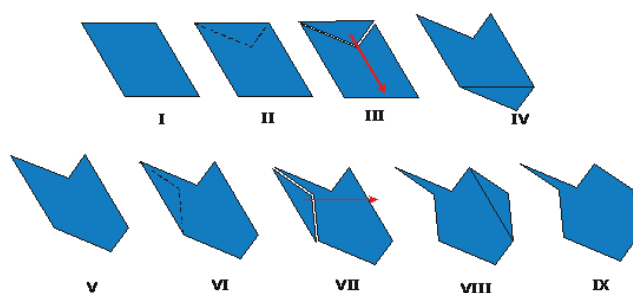


Figura 9. Octágonos contruidos a partir de un paralelogramo

Los octágonos que se nombran en el Teorema 2 son de dos tipos. En los primeros, los pares de lados opuestos paralelos y congruentes están separados por un segmento; en los segundos, los lados que tienen otro lado paralelo, congruente y opuesto, son adyacentes entre sí.

En el primer caso, estos octágonos se pueden obtener utilizando la primera técnica de Escher, recortando un cuadrilátero sobre uno de los lados y añadiéndolo en su opuesto (Figura 10).



Figura 10. Octágonos construidos a partir de un paralelogramo

En el segundo caso, los octágonos pueden obtenerse utilizando la misma técnica pero sobre un par-hexágono, que es un hexágono en el cual cada lado tiene un lado paralelo y congruente a él (Figura 11).

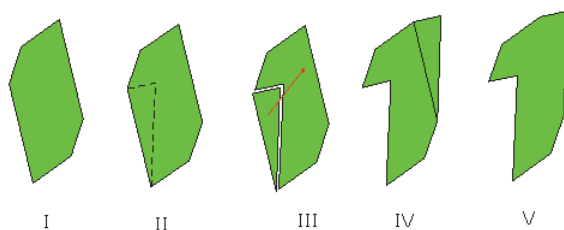


Figura 11. Octágonos construidos a partir de un par-hexágono

Sin embargo, esta no es una justificación válida mientras no se argumente por qué los par-hexágonos (Figura 12) teselan el plano.

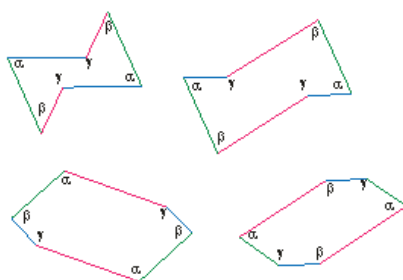


Figura 12. Par-hexágonos convexos y no convexos

Teniendo en cuenta que las medidas de los ángulos interiores de cualquier hexágono suman  $720^\circ$  y que los ángulos opuestos de un par-hexágono son congruentes, se tiene que:

$$\alpha + \beta + \gamma + \alpha + \beta + \gamma = 720^\circ$$

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 720^\circ$$

$$2(\alpha + \beta + \gamma) = 720^\circ$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$$

De esta manera, si se hacen coincidir los ángulos cuya medida son  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$ , se puede diseñar una teselación como muestra la Figura 13, con lo cual queda justificado que los par-hexágonos teselan el plano y el Teorema 2.

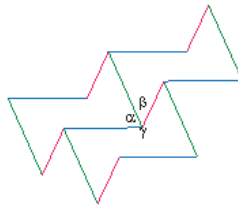


Figura 13. Inicio del recubrimiento de una porción del plano con par-hexágonos

## REFERENCIAS

Mariño, R. (2004). *La geometría en el arte y el diseño*. Bogotá, Colombia: Pro-Offset Editorial Ltda.